

数坛双璧

——柯瓦列夫斯卡娅和埃米·诺特

赵镇江

赵振江，河南汝州人，1995年毕业于中国科学院系统科学研究所。现任中国科学院自然科学史研究所副研究员。

在整个数学史上，女数学家非常罕见，尤其是在 20 世纪之前。其中原因，正如高斯（C. F. Gauss）在 1807 年 4 月 30 日写给索菲·热尔曼（Sophie Germain）的信中所说：“一个女性，由于我们的习惯和偏见，会遇到比男性多得多的困难，为了钻研这些 [科学] 难题，克服外围的障碍并深入到它们最幽微的部分，毫无疑问，她要有无畏的勇气、非凡的才能和过人的天赋。”19 世纪和 20 世纪分别见证了两个杰出的女数学家，她们的贡献在男性称霸的数学世界占了一席之地，赢得了人们的尊敬，她们就是柯瓦列夫斯卡娅和埃米·诺特。

柯瓦列夫斯卡娅和埃米·诺特堪称数坛双璧，一方面，她们有不少类似之处：家庭条件比较优越，有良好的智力和克服困难的勇气，在数学上都取得了令人瞩目的成就，又都是在创造力处于巅峰时突然去世。另一方面，她们也有很大差异：生活在不同的文化环境中，柯瓦列夫斯卡娅有激进的政治思想，诺特深受宗教影响。前者貌美，一生有多人相助，爱好很多，生前就声名显赫；后者相貌平平，虽然才华横溢，但求职、晋升都很困难，一生专注数学，心无旁骛，至死也没有得到应有的承认。

柯瓦列夫斯卡娅（1850—1891）

贵族小姐，1850—1867

索菲娅·瓦西列夫娜·柯瓦列夫斯卡娅（Софья Васильевна Ковалевская）1850 年 1 月 15 日生于莫斯科，父亲是沙皇军队中的将军而且是大地主，母亲是在 18 世纪定居俄国的德国移民的后代。在家中，柯瓦列夫斯卡娅排行第二，上有一个比她大 6 岁的姐姐，下有小她 5 岁的弟弟。索菲娅在祖国的教

育是她那个时代她所属的阶级的小姐所受的典型教育：由保姆和家庭女教师照管和教育，英语和法语说得几乎和母语一样好。

当索菲娅大约 6 岁时，她们家搬到靠近俄罗斯和立陶宛边境的帕利比诺庄园居住。由于地处偏远的乡下，糊墙的纸一时短缺，就用她父亲年轻时购买的书页，后来她回忆道：

幸运的巧合是，初次糊墙的纸是石印的奥斯特罗格拉茨基（М. В. Остроградский）的微积分讲义，这是我父亲年轻时买的。这些书页散布着奇怪的不可思议的公式，不久就吸引了我的注意力。我记得……我成几小时地站在这神秘的墙面前，试图破解哪怕是一个句子，发现书页的前后顺序。尽管我当时根本不可能弄懂这些内容，但长时间的注视使得许多公式的形状在我的记忆中留下了不可磨灭的印象，其内容也深深刻在我的脑海中。

喜爱数学，似乎是柯瓦列夫斯卡娅家的传统，她的曾祖是数学家和天文学家，祖父是数学家，父亲对数学和自然科学有广泛的了解。索菲娅对数学和科学的喜爱似乎源于她的一个舅舅，他在国防部任职，在姐姐的庄园住了较长时间，他经常与这位外甥女谈数学和哲学。索菲娅家的邻居有一位物理学教授，她从他家里借了一本物理学书，不明白书中的三角公式，就自己推导。结果让这位教授大为震惊，他说服索菲娅的父亲让她学习三角学和微积分。

1866 年，索菲娅随母亲到德国和瑞士旅行，买了一架小显微镜，观察植物和昆虫的细胞。次年，索菲娅全家在彼得堡过冬。在彼得堡期间，她跟教育家斯特兰诺柳布斯基（A. N. Strannoliubskii）学习高等数学。

当时俄国流行民粹主义，索菲娅深受姐姐的影响，也成为一个民粹主义者。这对她后来在瑞典求职有不利影响，因为瑞典当局害怕得罪沙皇。

尽管柯瓦列夫斯卡娅有明显的数学天赋，她也无法在祖国完成她的教育。因为在当时专制的俄国，不允许妇女上大学，为了到国外完成大学学业，年轻的女子需要得到她们父亲（或丈夫）的书面允许。当时在俄国贵族小姐中流行的做法是“假婚”，即和一位男子达成协议，他愿意举行婚礼。“假婚”之后她的父亲不再有管辖权，而她的“丈夫”遵守道义约束，与她只保持精神上的关系，允许这位妇女追求自己的生活。

1868 年 9 月，柯瓦列夫斯卡娅与毕业于莫斯科大学古生物系的弗拉基米尔·柯瓦列夫斯基（Владимир Онуфриевич Ковалевский，1842—1883）“结婚”。次年他们一起出国。

留学时期，1869—1874

1869年5月，弗拉基米尔和柯瓦列夫斯卡娅到达海德堡，下车伊始，他们就直奔海德堡大学，办理听课事宜。海德堡大学当局比较开明，允许她听课，而且大多数自然科学方面的著名教授也比较配合，如基尔霍夫（G. Kirchhoff）、亥姆霍兹（H. von Helmholtz）和柯尼希斯贝格尔（L. Königsberger）。10月，她和弗拉基米尔访问伦敦。弗拉基米尔和进化论的创始人达尔文（C. Darwin）和赫胥黎（T. Huxley）共度了一段时光，柯瓦列夫斯卡娅则受邀参加女作家艾略特（G. Eliot）的星期日沙龙，在这里她与哲学家斯宾塞（H. Spencer）就“女性抽象思维的能力”展开辩论。

在经过一个冬季的紧张学习之后，柯瓦列夫斯卡娅在1870年春到巴黎看望姐姐。此时她和弗拉基米尔的关系相当紧张，虽然学业进展良好，她还是希望在生活上得到姐姐的帮助。虽然未能如愿，柯瓦列夫斯卡娅决心尽快完成学业，获得博士学位。

1870年10月初，带着海德堡大学教授们的推荐信，柯瓦列夫斯卡娅到达柏林。柯尼希斯贝格尔推荐她跟自己的老师、伟大的数学家魏尔斯特拉斯（K. Weierstrass）学习。第一次见到柯瓦列夫斯卡娅，魏尔斯特拉斯对她要求学习数学感到吃惊，他给了她一些题目。在一周之内，柯瓦列夫斯卡娅拿着答案来找魏尔斯特拉斯，她表现出的才能吸引了这位伟大的数学家。他写信告诉他的瑞典学生米塔格-莱夫勒（G. Mittag-Leffler），说她具有的直觉能力，即使在他的更为年长更为成熟的学生中也是罕见的。

尽管有魏尔斯特拉斯和他一些杰出的同事的努力，柏林大学评议会仍拒绝柯瓦列夫斯卡娅在该校听课。不过，柯瓦列夫斯卡娅的才能已给魏尔斯特拉斯留下了深刻印象，他决定私下指导柯瓦列夫斯卡娅。单独指导加强了两人之间的联系，他们之间发展出一种温暖的个人和学术关系，魏尔斯特拉斯认为她是他最有才华的弟子，她视他若父，这种关系对柯瓦列夫斯卡娅非常重要，并且一直保持到她辞世。

柯瓦列夫斯卡娅非常勤奋，在1871—1874年的3年时间，除了在巴黎公社期间做了5个星期的医护和因为“丈夫”误解而与他争吵之外，她集中精力做数学研究。到1874年春，柯瓦列夫斯卡娅已写出三篇论文：涉及偏微分方程的《关于偏微分方程理论》（Zur Theorie der partiellen Differentialgleichung），论述土星环的《对拉普拉斯的土星环形状研究的评论和补充》和关于阿贝尔积分的《论一类3阶阿贝尔积分化为椭圆积分》。根据魏尔斯特拉斯的意见，其中的每一篇都可获得博士学位。但为了慎重，魏尔斯特拉斯决定用这三篇文章为柯瓦列夫斯卡娅申请博士学位，因为毕竟是史无前例。其中的第一篇最为重要，它推广了柯西（A. L. Cauchy）关于偏

微分方程解的存在性的定理，被认为是偏微分方程一般理论的第一个重要结果，现在以柯西—柯瓦列夫斯卡娅定理而知名。该定理最简单形式是：形为

$$p = f(x, y, z, q)$$

的任意方程，这里 $p = \partial z / \partial x$ ， $q = \partial z / \partial y$ ，而且函数 f 在 (x_0, y_0, z_0, q_0) 附近解析，有一个且仅有一个在 (x_0, y_0) 附近解析的解 $z(x, y)$ ，且

$$z(x_0, y) = g(y),$$

这里 $g(y)$ 在 y_0 解析，而且 $g(y_0) = z_0$ ， $g'(y_0) = q_0$ 。

1874年8月，由于魏尔斯特拉斯等人的推荐，在缺席的情况下，柯瓦列夫斯卡娅以优异成绩被格丁根大学授予博士学位。她是欧洲第一个在数学方面获得博士学位的女性。这年秋天，柯瓦列夫斯卡娅和丈夫回到俄国。9月底，在柯瓦列夫斯卡娅娘家的帕里比诺庄园举行了庆祝她的命名日的盛大聚会。

写作论文时的劳累，使柯瓦列夫斯卡娅筋疲力尽。在娘家休息几个星期之后，她和丈夫来到彼得堡，希望进入科学界，在大学或科学院获得职位。他们都有博士学位，柯瓦列夫斯基的博士学位是在1872年3月从耶拿大学得到的。但他们的求职并不顺利，尤其是柯瓦列夫斯卡娅还有性别的原因，他们都没有得到适合他们的职位。

远离数学，1875—1878

求职无望，经济上的困境使这对年轻人企图通过商业投机获得经济上的独立。回国后柯瓦列夫斯卡娅不想再研究数学，原因是她说的“没有这种气氛”，虽然她还与魏尔斯特拉斯通信讨论数学问题，也出席彼得堡科学界的一些会议，但与数学已渐去渐远。很快，柯瓦列夫斯卡娅成了典型的上流社会淑女，出入歌剧院和戏院，每星期在家招待客人。在和柯瓦列夫斯基作了7年假夫妻之后，他们在1875年的上半年开始了正常的夫妻生活。

社交界的浮华和生意场上的成功并没有让柯瓦列夫斯卡娅高兴多久。1875年9月，她的父亲去世，悲痛使她离开了数学，魏尔斯特拉斯试图使柯瓦列夫斯卡娅重返数学研究的想法由于她拒绝写信而没有成功。从这年10月到1878年8月，魏尔斯特拉斯没有从这位学生那里得到只言片语。生意场上的初步成功潜藏着危险，柯瓦列夫斯基也没有从以前经营出版社亏损的教训中清醒过来，他们夫妇不谨慎地投资房地产。柯瓦列夫斯卡娅社交圈在不断扩大，1876年，米塔格—莱夫勒来访，他试图引起她对数学的兴趣，但没有成功。

1878年10月17日，柯瓦列夫斯卡娅的女儿出生。分娩后，她病了几个月。更糟糕的是，他们在房地产上的投资破产了。三年来，她远离数学，沉浸在浮华的社交生活中，到了梦醒的时候了。柯瓦列夫斯卡娅决定回到数学上来。因为对数学的喜爱已融入她的血液，只不过环境让她暂且忘却。她已在女儿出生前的两个月恢复了与魏尔斯特拉斯的通信，请求他的指导。

漂泊，1879—1883

除了与魏尔斯特拉斯通信，柯瓦列夫斯卡娅还寻求本国数学家切比雪夫（П. Л. Чебышев）的帮助。第六届俄罗斯自然科学家和医学家大会将在1879年底在彼得堡召开，切比雪夫建议她为大会准备一个报告。柯瓦列夫斯卡娅找出一些自己以前研究中没有发表的关于阿贝尔积分的结果，并译成俄文交给大会的数学组。米塔格—莱夫勒也参加了这次会议，他对柯瓦列夫斯卡娅的才能深信不疑，决心为她谋求一个职位。

在拍卖家产之后，柯瓦列夫斯基夫妇离开彼得堡，到莫斯科居住。柯瓦列夫斯卡娅想让丈夫从生意失败中振作，回到古生物学研究上，但没有成功。他日益孤僻，时而高兴，时而沮丧。

1880年10月，柯瓦列夫斯卡娅把女儿托付给朋友照看，只身来到柏林，去看昔日的老师魏尔斯特拉斯，她已下决心重返数学研究。老师建议她做晶体介质中光传播的研究。次年，柯瓦列夫斯卡娅和丈夫分居，带着女儿来到柏林，想做一个职业数学家。

1882年3月，柯瓦列夫斯卡娅在巴黎送女儿和保姆返回俄国。在巴黎期间，由于米塔格—莱夫勒的帮忙，她结识了几位著名的法国数学家，如埃尔米特（C. Hermite），庞加莱（H. Poincaré）。7月，柯瓦列夫斯卡娅被选为巴黎数学会会员。

在国外期间，虽然柯瓦列夫斯卡娅在晶体介质中光的传播和刚体绕定点旋转这两个问题取得一些进展，但依旧前途未卜。幸运的是，有人在柯瓦列夫斯卡娅困难的时候伸出了援助之手。她的恩师魏尔斯特拉斯在柏林为她租房子，米塔格—莱夫勒从1881年起就尝试为她找一份工作，先是在赫尔辛基，然后是在斯德哥尔摩。

1883年4月，柯瓦列夫斯基由于事业失败而自杀。消息传来，柯瓦列夫斯卡娅异常震惊，她拒绝进食，以致昏厥。但恢复知觉后，她又开始进行研究。正是这个时候，她完成了光折射问题的研究。这一年的夏天和秋天，柯瓦列夫斯卡娅在莫斯科办理丈夫的后事。8月底，她向第7届俄罗斯自然科学家和医学家大会提交了论文。9月初，柯瓦列夫斯卡娅从在魏尔斯特拉斯那里得到消息，经过米塔格—莱夫勒的不懈努力，她得到了瑞典斯德哥尔摩

大学的无薪讲师 (Privatdocent) 职位, 试用期一年。

柯瓦列夫斯卡娅很快接受这一职位, 并在 1883 年 11 月 15 日离开彼得堡, 乘船经芬兰去斯德哥尔摩。当时, 柯瓦列夫斯卡娅是整个欧洲拥有大学教职的唯一的一位女性。两天后, 她到达目的地。瑞典的报纸对她的到来表示欢迎。柯瓦列夫斯卡娅拥有出色的语言才能, 到瑞典两个星期, 她的瑞典语已相当流利。米塔格—莱夫勒告诉她, 有 12 名学生听她的课。柯瓦列夫斯卡娅作了认真准备, 课题是偏微分方程——一个她曾作出贡献的领域。

最后岁月, 1884—1891

1884 年 1 月 30 日, 柯瓦列夫斯卡娅在斯德哥尔摩大学上她的第一堂课, 用德语讲授偏微分方程, 尽管紧张, 但讲课很成功。到柯瓦列夫斯卡娅去世 7 年间, 她沉浸在数学生活的各个层面——科学的、社会的、政治的。1884 年 6 月, 她的职位进一步提高, 担任斯德哥尔摩大学教授, 任期 5 年。在这一年, 她还担任新创办的期刊《数学学报》(Acta Mathematica) 的编辑, 与欧洲数学家保持通信联系。

在教学和编辑刊物之外, 柯瓦列夫斯卡娅继续研究刚体绕定点旋转的问题。由于这个问题的困难性, 她预计要用 5 年的时间。在行星运动之外, 牛顿 (I. Newton) 力学的最辉煌的成就之一是欧拉 (L. Euler) 得到的描述在引力作用下一个刚体围绕一个定点运动的方程——欧拉方程。日常生活中的一个例子是旋转着的陀螺的运动。陀螺相对于一个定点的位置和速度由 6 个变量的 q 描述, 3 个表示位置, 3 个表示速度, 它们满足方程组

$$q_t = f(q)。$$

该方程组的一个不变量或积分是一个函数 $g(q)$, 它在运动下, 即满足 $(g_q, f) = 0$ 时使得 $dg(q) = 0$ 。能量和所有的旋转运动给出两个不变量, 当存在与这两个无关的第三个不变量时, 可以证明这个方程组是可积的, 即可通过积分求解。欧拉发现重心是定点时方程组是可积的, 拉格朗日 (J. L. Lagrange) 发现当物体是旋转对称, 且附着在旋转轴上的一个点时方程组也是可积的。柯瓦列夫斯卡娅的研究目标是发现新的可积条件。

法国数学界甚为看重柯瓦列夫斯卡娅在刚体旋转方面的工作。1886 年, 在《法国科学院报告》(Comptes Rendus) 上发布了一则消息:

鲍廷奖 (Prix Bordin)

(为 1888 年提的问题)

“以某个重要的观点改进刚体运动的理论。”该奖是价值 3000 法郎的一枚金质奖章。参加竞赛的论文手稿应在 1888 年 7

月 1 日前寄给科学院的秘书；随寄密封的信封，其中写有作者的姓名和地址。信封仅当它对应的论文得奖时才被打开。

在紧张准备竞赛论文的时候，柯瓦列夫斯卡娅的姐姐病重了。1886 年夏，她到彼得堡看望姐姐。在 1886—1887 学年，柯瓦列夫斯卡娅极为忙碌：为女儿雇保姆，教课，关注姐姐的健康，撰写论文，还有社交。她认识了俄国历史学家马克西姆·柯瓦列夫斯基（Максим Ковалевский），他是柯瓦列夫斯卡娅已故丈夫的远房亲戚，后来他们发展了亲密的关系。马克西姆目睹了柯瓦列夫斯卡娅为研究刚体问题而忘我地工作。1888 年夏，柯瓦列夫斯卡娅把她的论文寄给巴黎科学院。12 月 24 日，米塔格—莱夫勒接到来自巴黎的电报：“鲍廷奖授予柯瓦列夫斯基夫人……”。此时，柯瓦列夫斯卡娅和马克西姆在巴黎，等待竞赛结果。柯瓦列夫斯卡娅获奖，实至名归。由于她的结果如此出色，鲍廷奖委员会决定将奖金从原定的 3000 法郎提高到 5000 法郎。经过 5 年的艰苦劳动，终于获奖，柯瓦列夫斯卡娅非常高兴。她和马克西姆一起出席授奖仪式，参加法国科学院的宴会。

柯瓦列夫斯卡娅获奖论文的标题是《论刚体围绕一个定点旋转的问题》。在这篇论文中，柯瓦列夫斯卡娅发现了新的可积情形，但不如欧拉和拉格朗日发现的情形那样易于描述。在这项研究中，柯瓦列夫斯卡娅的出发点相当简单，她要求所有的变量是时间 t 的幂级数，然后乘以 t 的一个负的幂。经过相当复杂的计算，给出了对物体和其运动的限制，这蕴含着存在第三个变量且可求积，位置变量是时间 t 的椭圆函数。她的发现现在以“柯瓦列夫斯卡娅陀螺”著称。柯瓦列夫斯卡娅的论文是一项显著的成就，后来证明欧拉、拉格朗日和柯瓦列夫斯卡娅发现的三种情形是仅有的可能的情形。用现在的术语来说，绝大多数刚体围绕定点的运动是混沌的。

柯瓦列夫斯卡娅小时曾迷恋作家陀思妥耶夫斯基（Ф. М. Достоевский），在远离数学时期，她曾向杂志投稿，回忆她与女作家艾略特的交往。在紧张研究刚体问题时期，她仍没有完全忘记文学，写回忆录，与别人合写剧本。

由于柯瓦列夫斯卡娅的出色成果，再加上米塔格—莱夫勒的成功斡旋，1889 年 6 月，她被委任为斯德哥尔摩大学讲座教授。她也是近代欧洲第一个拥有这种职位的女性。柯瓦列夫斯卡娅想在祖国的大学获得一个职位，但没有成功。不过，由于切比雪夫等三位著名科学家的推荐，她还是得到了来自祖国的荣誉。12 月，柯瓦列夫斯卡娅当选为俄罗斯皇家科学院通讯院士，她是历史上第一个获得此项殊荣的女科学家。

在接下来的一年多的时间，柯瓦列夫斯卡娅除了教课，她的主要精力用于文学创作。1890 年，她的《童年回忆》和《传略》发表。同年 11 月，柯瓦列夫斯卡娅离开斯德哥尔摩，和马克西姆在巴黎过圣诞节。然后，他们去

了法国南方。在热那亚，她着凉了。当回到斯德哥尔摩时，她的病情已比较严重。但她还是在 1891 年 2 月 6 日给学生上课。很快，柯瓦列夫斯卡娅的病情恶化，并在 2 月 10 日去世，享年仅 41 岁。她葬在瑞典斯德哥尔摩的一座公墓里。

柯瓦列夫斯卡娅在创作力旺盛的时候英年早逝，使全欧洲的数学家和知识分子感到震惊和悲痛。在斯德哥尔摩的许多学者参加了柯瓦列夫斯卡娅的葬礼。米塔格—莱夫勒的兄弟写了一首诗纪念柯瓦列夫斯卡娅，称她为“天上的缪斯”：

当土星环仍在闪耀
当人们还在呼吸
世界会永远记忆
你的名字

1948 年，苏联科学院编辑出版柯瓦列夫斯卡娅的《科学著作集》，把她的全部 10 篇论文译成俄文。1951 年是柯瓦列夫斯卡娅诞生 100 周年，苏联和瑞典分别在莫斯科和斯德哥尔摩举行纪念活动，苏联还发行了纪念邮票。月球上的一个环形山用她的名字命名。德国亚历山大·冯·洪堡基金会设立索菲娅·柯瓦列夫斯卡娅奖，从 2002 年开始颁发。

埃米·诺特（1882—1935）

埃尔朗根岁月，1882—1915

阿玛丽·埃米·诺特（Amalie Emmy Noether）1882 年 3 月 23 日生于德国埃尔朗根市的一个犹太人家庭，父亲马克斯·诺特（Max Noether, 1844—1921）是埃尔朗根大学的数学教授，母亲的娘家是科隆地区的一个犹太富商。诺特是家中的长女，下面有三个弟弟，其中的一个弟弟弗里茨后来也成了数学家。

出生于这样的家庭，再加上犹太文化重视学识，诺特从小受到了良好的教育。她 7 岁进入女子学校上学，同学都是富有的医生、律师、商人和学者的女儿。当时的社会并不期望女孩成为学者，但作为有教养的淑女，她们需要学习读、写、算，要会说法语和英语，会弹钢琴，会料理家务。1887 年，诺特从这所女子学校毕业，但没有毕业证书（这类学校不发毕业证）。接下来的三年，她父母聘请老师辅导她的法语和英语。1900 年，诺特通过了巴伐利亚州的考试，有了担任英语和法语教师的资格。最初，她计划到初级学校

教法语和英语，但由于教外语比较单调，她改变了主意，希望拿到大学预科（Gymnasium）的毕业证书。由于父亲的支持，诺特从1900年到1902年在埃尔朗根大学旁听。1903年7月，她通过了考试，得到了毕业证书。

当时德国的数学中心在格丁根大学，索菲娅·柯瓦列夫斯卡娅从这里获得博士学位的故事诺特耳熟能详，她希望到格丁根学习数学。虽然在埃尔朗根大学有许多方便，但毕竟格丁根才是大师云集的地方。经过努力，1903—1904年冬季学期，诺特在格丁根大学注册学习，旁听数学教授希尔伯特（D. Hilbert），克莱因（F. Klein），闵科夫斯基（H. Minkowski）和布卢门撒尔（O. Blumenthal）的课。由于患病，诺特回到家中。当身体略有恢复，她就开始自学。在诺特恢复健康的过程中，埃尔朗根大学允许女生作为正式生注册，她权衡之后，决定留在埃尔朗根学习。

1904年10月，诺特在埃尔朗根大学注册。指导诺特的是她父亲和号称“不变量之王”的戈丹（P. Gordan）教授。戈丹成了诺特的博士生导师，诺特是他唯一的博士生。经过3年多的学习，1907年12月，诺特关于代数不变量的论文《三元双二次型不变量的完全系》以优异成绩通过论文答辩，并于次年获得埃尔朗根大学颁发的哲学博士学位。

诺特的博士论文研究的是代数不变量问题。这个问题最早来自数论。称 n 个变元 x_1, x_2, \dots, x_n 的 m 次齐次多项式 $J(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 n 元 m 次代数型。设线性变换 T 将变元 x_1, x_2, \dots, x_n 变为 X_1, X_2, \dots, X_n ，此时多项式 $J(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 变为 $J^*(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ， J 的系数 a_0, a_1, \dots, a_q 变为 J^* 的系数 A_0, A_1, \dots, A_q 。若对全体线性变换 T 有 $J = J^*$ ，则称 J 为不变式，称在线性变换下保持不变的 J 的系数的任何函数 I 为 J 的不变量。不变量理论中的一个问题是寻求不变量的完备系，亦即代数型的基。戈丹用纯粹形式和构造的方法证明了二元型的有限基的存在性。诺特的博士论文将戈丹的方法扩展到三元双二次型，产生了明确陈述出来的有 331 个共变形的系统。

1908年，诺特应邀加入意大利的巴勒莫数学学会和德国数学会，并第一次和父亲一起去罗马参加德国数学会的会议。次年，德国数学会在萨尔茨堡举行会议，诺特提交了论文。

诺特继续研究不变量理论，考虑 n 元型的情况，结果是1911年发表的论文《 n 元型的不变量理论》。早在1888年，希尔伯特证明 n 元型的基的有限性，但他的方法不是构造性的。1911年，菲舍尔（E. Fischer）继任戈丹在埃尔朗根大学的教授职位，受菲舍尔的影响，诺特逐渐转向希尔伯特的抽象化方向。

1913年，诺特参加德国数学会在维也纳举行的会议，她再次提交了论

文。会后，她去拜访菲舍尔的博士生导师梅滕斯 (F. Mertens)。梅滕斯曾在 1886 年用归纳法证明二元型组的戈丹定理。诺特的转变，表现在 1914 年 5 月完成，次年发表的论文《有理函数域和有理函数系》中。

格丁根岁月，1915—1933

1915 年，在爱因斯坦发表广义相对论之后，希尔伯特和克莱因邀请诺特到格丁根大学，协助考虑他们在研究广义相对论时出现的某些问题。诺特的贡献是诺特定理，该定理对广义相对论和粒子物理学来说是基本的。1918 年，在写给希尔伯特的信中，爱因斯坦对诺特的深入的数学思想大为赞赏。

诺特在格丁根安顿下来之后，希尔伯特和克莱因希望为她争取无薪讲师一职，遇到很大阻力。在当时的德国，如果一个人想在大学授课，除获得博士学位之外，还需经过授课资格考察这一过程。1908 年的一项法律禁止女性接受授课资格考察。无奈，希尔伯特让诺特在他的名下授课。

第一次世界大战在 1919 年结束，德国对妇女的态度有所改变。1919 年 6 月，诺特接受授课资格考察并成为无薪讲师。最后，格丁根大学在 1922 年给予诺特代数学方面的有薪讲师资格。虽然诺特的声名日益显赫，但她服务的大学对此无动于衷，直到她离开。

虽然诺特在格丁根大学的任职充满艰辛，但她的研究却稳步前进。外尔 (H. Weyl) 认为，从 1907 年到 1919 年这一时期，诺特相对依赖其他数学家的思想。这个时期的研究为诺特赢得了声誉，但她对数学更重大的贡献是她在 1919 年后做出的。1921 年，诺特在《数学年刊》上发表《环中的理想论》。许多数学家认为，这是她最重要的论文。

代数学中，一个环 R 是具有两个二元运算（加法和乘法）的集合，使得：

1. R 对加法是一个交换群；
2. 乘法是结合的：

$$(xy)z = x(yz),$$

而且对于加法有分配律：

$$x(y+z) = xy + xz,$$

$$(y+z)x = yx + zx.$$

环 R 的理想是满足下列条件的子环 I ：如果 $a \in I$, $r \in R$, 则 ar 和 ra 都属于 I 。例如，整数集 Z 对通常定义的加法和乘法构成环，所有的偶数 (2) 是 Z 的理想。

在诺特写这篇论文时，具体的环和理想的构造是熟知的，如戴德金 (R. Dedekind) 和克罗内克 (L. Kronecker) 关于代数数的工作。她把它们置

于更为系统化和公理化的基础上。文中表现出的风格，正如范德瓦尔登（B. L. van der Waerden）所说：

“对于埃米·诺特，只有当数、函数和运算之间的关系从任何特定的对象分离出来，并且化为一般概念的关系，它们才变得清楚，易于推广且多产。”

在这篇已成为经典的论文中，诺特把拉斯克（E. Lasker）关于一个已知的多项式是否属于一个理想的定理推广到满足升链条件的任意的交换环。

1927年起，诺特集中研究非交换代数及其线性变换在交换域中的应用，用新的抽象方法建立非交换代数理论。我们通常碰到的运算是交换的，如整数的加法和乘法，但矩阵对乘法是不交换的。这个时期她的重要论文有《超复数系及表示论》（1929）和《非交换代数》（1933），都发表在《数学杂志》（*Mathematische Zeitschrift*）上。

1928—1929年，应苏联数学家亚历山德罗夫（П. С. Александров）的邀请，诺特到莫斯科大学任访问教授，她的一系列学术活动影响了年轻一代的苏联数学家。

1932年，诺特在法兰克福教了一学期的课。9月，第九届国际数学家大会在瑞士苏黎世举行。在会上，诺特作了题为《超复数系及它们与交换代数和数论的关系》的报告，成为第一个在国际数学家大会上作主报告的女数学家。同年，诺特和阿廷（E. Artin）一起获得推进数学科学的阿尔弗雷德·阿克曼-陶贝尔（Alfred Aekermann-Teubner）纪念奖。

诺特对数学的贡献是多方面的，其一，她做出了许多原创性的工作，提出了一些重要概念，如以她的名字命名的诺特环、诺特模等。其二，诺特经常讲课，参加数学会议，她的数学思想通过听她报告的学生在世界上广为传播。范德瓦尔登的举世闻名的《近世代数学》（1931）就是他根据诺特和阿廷讲课的内容写就的。在格丁根期间，诺特先后指导了9名学生的博士论文，这些学生在数学界都不是无名之辈。当时的格丁根大学号称“数学的麦加”，到这里求学的学生来自世界各地。在诺特指导过博士论文的学生中，有来自中国江西的曾炯之（1898—1940），1934年，他以《函数域上的代数》一文得到格丁根大学的博士学位。

1933年1月，希特勒成为德国总理，标志着纳粹获得了政权。4月7日，帝国法律宣布非雅利安人（德国犹太人和其他不受欢迎的少数民族的人）不能担任公务员。在德国，大学教授被划为公务员。4月13日，格丁根大学数学研究所接到电报，勒令诺特和其他5位在研究所工作的犹太裔教授立即离职。即使她在1920年改信基督教也无济于事，纳粹不是根据宗教信仰而是种族出身攻击犹太人的。

此时，许多受影响的教授接到了来自美国的学术机构的邀请，不少人去了美国。而诺特希望在他的朋友和同事亚历山大罗夫的帮助下在莫斯科获得一个职位，牛津大学的索默维尔学院也尝试用美国洛克菲勒基金会的资助为她安排工作，但都没有成功。最终，位于美国宾夕法尼亚州的布林·莫尔学院为诺特提供了客座数学教授一职。10月2日，诺特接受了这一职位并动身赴美。

布林·莫尔和普林斯顿岁月，1933—1935

1933年10月，诺特乘船抵达纽约，一周之后，她出现在布林·莫尔学院美丽的校园里。这是一所女子学院，在7月之前，她从未听说过这个学校。12月，布林·莫尔学院的院长邀请十多位附近大学的数学家来听诺特教授的报告。洛克菲勒基金会还提供经费，让诺特和普林斯顿高等研究院保持联系，每星期她到高等研究院作一次报告。

在布林·莫尔一年之后，诺特在1934年夏回到格丁根，她仍幻想在祖国讲课和指导研究。她发现这是不可能的，无奈，她把家具和书籍托运到布林·莫尔。

诺特又回到美国，但没有研究气氛的布林·莫尔学院显然不适合她。不过，诺特没有柯瓦列夫斯卡娅那样幸运，她没有自己的“米塔格—莱夫勒”，虽然有人为诺特的工作奔忙。最后，她得到了在布林·莫尔学院工作两年的经费。

1935年4月7日，诺特写信给德国数学家哈塞（Helmut Hasse, 1898—1979），讨论合作出版的计划。次日，她到布林·莫尔医院做妇科手术。术后四天，她似乎恢复得很好，之后，在没有预兆的情况下，她突然去世。

1935年4月15日，星期一，《纽约时报》第19版上发表了一则短消息：

埃米·诺特博士。费城，4月14日（美联社）埃米·诺特博士，布林·莫尔学院数学访问教授，今天在一家医院去世，上星期她在这家医院接受手术。享年52岁。诺特博士以前在德国的格丁根大学教数学。她两年前来美国。

在诺特去世后，1935年5月4日，爱因斯坦致信《纽约时报》的编辑，高度评价她的工作：“根据在世的最有竞争力的数学家们的判断，诺特小姐是自女性开始接受高等教育以来出现的最具创造力的数学天才。在最有天赋的数学家们忙碌了数个世纪的代数学领域，如今，她发现的方法的极端重要性已被年青一代数学家的成长所证明。”

1960年，埃尔朗根市当局用诺特和她父亲的名字命名该市的一条街道。

1982年，女数学工作者联合会主办的纪念诺特诞辰100周年研讨会在布林·莫尔学院举行。同年，埃尔朗根的一所学校被命名为埃米·诺特学校，诺特小时在该校上过学。1983年，施普林格出版社出版了诺特的论文全集。对此，法国数学家迪厄多内（J. Dieudonné）评论说：“诺特论文全集出版得太迟了，因为，她是迄今为止最优秀的女数学家，而且是20世纪最伟大的数学家（男性或女性）之一。”此外，月球上的一个环形山和编号为7001的小行星也是用诺特的名字命名的。

参考文献

- [1] 吴文俊. 世界著名数学家传记. 北京: 科学出版社, 1995.
- [2] Bollobás B. Littlewood's Miscellany. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.
- [3] Brewer J W and Smith M K, eds. Emmy Noether: A Tribute to Her Life and Work. New York: Marcel Dekker, Inc., 1981.
- [4] Cook R. The Mathematics of Sonya Kovalevskaia. New York: Springer-Verlag, 1984.
- [5] Dick A. Emmy Noether, 1882—1935. Basel: Birkhäuser Verlag, Inc., 1970.
- [6] Eves H. An Introduction to the History of Mathematics. New York: CBS College Publishing, 1983.
- [7] Hederson H. Modern Mathematicians. New York: Facts on File, Inc., 1996.
- [8] Klein M. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. New York: Oxford University Press, 1972.
- [9] Kovalevskaia S V. A Russian Childhood. Translated and edited by Beatrice Stillman. New York: Springer-Verlag, 1978.
- [10] Morrow C and Perl T, eds. Notable Women in Mathematics. Westport: Greenwood Press, 1998.
- [11] Noether E. Gesammelte Abhandlungen. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
- [12] Srinivasan B and Sally J D, eds. Emmy Noether in Bryn Mawr. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [13] Tent M B W. Emmy Noether: The Mother of Modern Algebra. Wellesley: A K Peters, Ltd., 2008.
- [14] Van der Waerden B L. A History of Algebra. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
- [15] Koblitz A H. A Convergence of Lives. Boston: Birkhäuser Verlag, Inc., 1983.
- [16] Koblitz A H. Sofia Kovalevskaia and the Mathematical Community. The Mathematical Intelligencer, 6(1): 20-29.
- [17] Gårding L H. Mathematics and Mathematicians: Mathematics in Sweden before 1950. The American Mathematical Society, 1998.
- [18] Meschkowki H. Denkwiese großer Mathematiker. Braunschweig: Vieweg, 1990.